Дифференцируемые функции

1. Теорема Ферма. Докажите, что, если функция f дифференцируема в точке экстремума x_0, то $f'(x_0) = 0$.

2. Теорема Ролля. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, дифференцируема на интервале (a, b) и $f(a) = f(b)$, то найдётся точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

3. Теорема Лагранжа. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема на интервале (a, b), то найдётся точка $c \in (a, b)$ такая, что $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

4. Теорема Коши. Если функции f и g непрерывны на отрезке $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b), производные f' и g' не обращаются в нуль одновременно ни в одной точке интервала (a, b) и $g(a) \neq g(b)$, то найдётся точка $c \in (a, b)$ такая, что $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

5. Функция f, дифференцируемая на промежутке (a, b), возрастает на нём. Докажите, что для всех $x \in (a, b)$ верно неравенство $f'(x) \geqslant 0$.

6. Функция f, дифференцируемая на промежутке (a, b), такова, что для всех $x \in (a, b)$ верно неравенство $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) > 0$). Докажите, что f возрастает (строго возрастает) на этом промежутке.

7. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции f на отрезке $[a, b]$:

(a) $f(x) = 6x^3 - 3x^2 - 12x + 7$, $[a, b] = [-1, 2]$;

(b) $f(x) = x^2\sqrt{3-x}$, $[a, b] = [1, 3]$;

(c) $f(x) = 15 - 3\cos x + \cos 3x$, $[a, b] = [0, \pi/2]$;

(d) $f(x) = |x^2 - x - 6| - x^3$, $[a, b] = [-4, 4]$.

8. Найдите количество вещественных корней многочлена $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$.

9. Равноускоренное прямолинейное движение. Докажите, что существует единственная дважды дифференцируемая функция $x(t)$, удовлетворяющая равенствам: $x(0) = x_0$ (начальное положение), $x'(0) = v_0$ (начальная скорость) и тождеству $x''(t) = a$ при всех $t \geqslant 0$.

10. Закон преломления света. Луч света вышел из точки A одной среды, преломился на границе ℓ и пришёл в точку B другой среды. Расстояния от точек A и B до границы равны h_1 и h_2 соответственно. Обе среды изотропны: свет в них распространяется прямолинейно с постоянными скоростями v_1 и v_2. Пусть α_1 и α_2 – углы падения и преломления света (т. е. углы между лучом и нормалью n к границе). Зная, что свет проходит по пути, по которому он затратит наименьшее возможное время, докажите равенство $\frac{v_1}{\sin\alpha_1} = \frac{v_2}{\sin\alpha_2}$.

11. Дан многочлен $P(x) = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \ldots + a_1x + a_0$ нечётной степени с положительными коэффициентами. Докажите, что существует такая перестановка его коэффициентов (может быть, тождественная), что у полученного многочлена есть ровно один вещественный корень.

12. Найдите все дифференцируемые функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f \circ f \equiv f$.